Lección n°5: Productos y coproductos. EPN, 2021

El siguiente concepto importante que manejaremos es muy similar al de objeto libre, en el sentido de que también se basa en la existencia y unicidad de una flecha, para todo el conjunto de objetos y flechas de una categoría; de tal manera, que un diagrama en especifico conmute. Este tipo de propiedades se llaman informalmente **universales**.

Definición. *Dada $\mathscr{A}$ una categoría y $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, entonces otro objeto P junto con un par de flechas $p_1 : C \to A$, $p_2 : C \to B$ se dice un **producto** de A y B si es que verifica la **propiedad universal del producto**, esto quiere decir que para todo $X \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y flechas $f_1 : X \to A$, $f_2 : X \to B$ existe un único $\overline{f} : X \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
 & P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

A las flechas p_1 y p_2 se les dirá proyecciones.

Aunque formalmente el producto de A y B, en la anterior definición, es el objeto P junto con las proyecciones p_1 y p_2; informalmente, nos referiremos a P solamente como el producto de A y B, además escribiremos $P = A \times B$. Este no necesariamente es el producto cartesiano de conjuntos, siendo eso solo cierto en la categoría **Set**.

Observación 24. *La motivación del producto de dos elementos, en una categoría arbitraria, es una importante discusión que no podemos ignorar:*

Si A y B son conjuntos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ se caracteriza por el hecho de que todo elemento de $A \times B$, es un elemento de A, junto a un elemento de B. Es decir, si tenemos dos elementos $x \in A$, $y \in B$, esto determina únicamente un elemento $u \in A \times B$, donde $u = (x, y) = (p_1(u), p_2(u))$. En lo último p_1, p_2 son las proyecciones usuales: $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$.

Ahora necesitamos un cambio de perspectiva. Un elemento x de un conjunto A se lo puede ver como una función $x : \{1\} \to A$ tal que $x(1) = x$, (en realidad podemos elegir cualquier conjunto, en lugar de $\{1\}$, siempre y cuando tenga un único elemento). Por consiguiente, podemos parafrasear lo dicho en el párrafo anterior como:

Si tenemos dos funciones $x : \{1\} \to A$, $y : \{1\} \to B$ entonces esto determina una única función $(x, y) : \{1\} \to A \times B$ con $(x, y)(1) = (x, y)$ y además es claro que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \{1\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "{(x,y)}"] \arrow[dr, "y"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Ahora, para un conjunto arbitrario X, podemos ver al mismo como una familia de funciones $x : \{1\} \to X$ con $x \in X$, así el argumento anterior puede ser generalizado para todo conjunto, no solo $\{1\}$, y obtenemos el diagrama de la propiedad universal del producto. Análogamente a lo hecho aquí en la categoría ***Set****, se define así al producto de dos elementos para una categoría arbitraria.*

La siguiente generalización, para más de dos objetos, es evidente.

Definición. *Dada $\mathscr{A}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de elementos de $\mathscr{A}$, entonces un producto para $\{A_i\}_{i\in I}$ es un elemento P junto con una familia de flechas $\{p_i : P \to A_i\}_{i\in I}$, llamadas proyecciones, tales que para cada objeto X y cada familia de flechas $\{f_i : X \to A_i\}_{i\in I}$ existe una única flecha $\overline{f} : X \to P$ tal que $p_i \circ \overline{f} = f_i$ para todo $i \in I$.*

Como antes, a P informalmente le llamaremos producto de $\{A_i\}_{i\in I}$ y lo notaremos por

$$\prod_{i\in I} A_i$$

El hecho de que hayamos dicho que podemos fijar una notación para el producto y que la misma solo depende de los elementos que lo conforman, nos siguiere que es único, o en este caso que es esencialmente único.

Lema 8.4. *Para una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, si existe un producto $(P, \{p_i\}_{i\in I})$, entonces P es esencialmente único.*

Demostración. Supongamos que existe otro producto $(P', \{p_i'\}_{i\in I})$. Usando la definición de producto en P y P', tenemos respectivamente que existen únicas flechas $\overline{f} : Q \to P$ y $\overline{f}' : P \to Q$ tales que para cada $i \in I$ los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dr, "p_i'"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\
 & A_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\overline{f}'"] \arrow[d, "p_i"'] & P' \arrow[dl, "p_i'"] \\
A_i &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, componiendo de izquierda a derecho lo anterior, tenemos para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[rr, "\overline{f}'\circ\overline{f}"] \arrow[dr, "p'_i"'] & & P' \arrow[dl, "p'_i"] \\
& A_i &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $\overline{f}' \circ \overline{f}$ es una flecha tal que $p'_i \circ (\overline{f}' \circ \overline{f}) = p'_i$. Ahora por la definición de producto en P' existe una sola flecha con esta característica, pero también se tiene que $p'_i \circ 1_{P'} = p'_i$ por tanto se de debe cumplir que $\overline{f}' \circ \overline{f} = 1_{P'}$.

De manera análoga , componiendo de derecha a izquierda los diagramas, obtenemos que $\overline{f} \circ \overline{f}' = 1_P$. Así $f : P \to P'$ es un isomorfismo y es único.

□

Ejemplo 8.10.

- *Como discutimos antes, en **Set** el producto de dos objetos A y B siempre existe y es $A \times B$, el producto cartesiano usual.*

- *En **Top** también existen siempre los productos de espacios topológicos. Algo notable es que ahora podemos asegurar que efectivamente la topología producto, en contraste con la topología de caja, es la adecuada para el producto de espacios topológicos.*

  *En efecto, si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y P su producto cartesiano, entonces para cada $i \in I$ existe una flecha $\pi_i : P \to A_i$, con $\pi_i(x) = x_i$, cada uno de estas aplicaciones se conocen como proyecciones canónicas. Probemos que P armado de la topologia producto junto con las proyecciones canónicas p_i es el producto en **Top**. Esto en general no tiene porque ser cierto, para hacer énfasis de esto se dice*

  La topología producto es la topología inicial con respecto a las funciones p_i (ver Lección 1) y además dado cualquier $f : X \to A$ con X espacio topológico, entonces f es continua si y solo si para todo $i \in I$, $f_i = \pi_i f : X \to A_i$ es continua (Ver lema 0.2). Pero esto es justamente lo que necesitamos para probar la propiedad universal de la definición de producto:

  *Dado X espacio topológico y $\{f_i : X \to A_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones continuas. Podemos ahora definir una flecha $f : X \to P$ como $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Es claro que $f_i = \pi_i f$ y por lo dicho antes f es continua solo si P tiene la topologia producto, así es flecha en **Top**. Más aún, es fácil ver que es la única con esta propiedad. Así el producto cartesiano de espacios topológicos armado de la topología producto es el producto en **Top**.*

- *En **Vect**$_k$ el producto de espacios vectoriales existe cuando estos se intersecan solo en el origen y es la suma directa de espacios vectoriales $X \oplus Y$. La idea detrás es: si X e Y están en suma directa, entonces están bien definidas las aplicaciones lineales $p_1 : X \oplus Y \to X$ y $p_2 : X \oplus Y \to Y$ con $p_1(x+y) = x$ y $p_2(x+y) = y$.*

  Si es que ahora, tomamos cualesquier espacio vectorial Z y aplicaciones lineales $f_1 : Z \to X$, $f_2 : Z \to Y$. Entonces $\overline{f} : Z \to X \oplus Y$ con $\overline{f}(z) = f_1(z) + f_2(z)$ está bien definido, es lineal y es el único que hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
& X \oplus Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

- *Consideremos un poset* $(P, \leqslant)$ *y notemos que para dos elementos* $a, b \in P$*, si su mínimo existe* $\text{mín}\{a, b\}$ *entonces es claro que*

$$\text{mín}\{a, b\} \leqslant a, \qquad \text{mín}\{a, b\} \leqslant b.$$

  Más aún, si es que tenemos un elemento $x \in P$ *tal que* $x \leqslant a$ *y* $x \leqslant b$ *entonces* $a \leqslant \text{mín}\{a, b\}$*. Pero, si vemos a* P *como una categoría, esto es justamente la propiedad universal del producto, pues en un poset, todo diagrama conmuta.* $\text{mín}\, a, b$ *es el producto de* a *y* b*.*

  Como caso particular, si fijamos un conjunto A*, el poset*$(\mathscr{P}, \subseteq)$ *entonces el producto de* $X, Y \in \mathscr{P}$ *es el conjunto* $X \cap Y$*.*

  Por otro lado, si tenemos el poset $(\mathbb{N}, |)$ *donde* $|$ *es la relación de divisibilidad, entonces el producto de dos numeros naturales* n *y* m *será justamente el máximo común divisor* $m.c.m(x, y)$*.*

- *En el caso general, si es que tenemos una familia vacía de objetos en un categoría* $\mathscr{A}$*, esto es,* $\{A_i\}_{i \in I}$ *con* I *un conjunto vacío. Entonces su producto consistirá de un objeto*P *de tal manera que, para todo objeto* A *existe una única flecha* $\overline{f} : A \to P$*. (Las otras condiciones se cumplen trivialmente por que* I *es vacío). Pero esto es justamente la definición de objeto couniversal. Así el producto de una familia vacía de objetos es un objeto couniversal.*

Ejemplo 8.11. *En álgebra abstracta, es usual encontrarse con el producto directo de grupos, revisemos este concepto y veamos que es el producto en la categoría* ***Grp****.*

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ *una familia indexada de grupos, entonces consideremos su producto cartesiano* $P = \prod_{i \in I} G_i$ *y armémoslo de una estructura de grupo de la siguiente manera.*

Definimos una operación en P*: para dos elementos* $g, h \in P$ *definimos* $g \bigodot h$ *en cada componente como* $(g \odot h)_i = g_i \odot_i h_i$ *para todo* $i \in I$*, donde* $g_i, h_i \in G_i$ *y* $\odot_i$ *es la operacion de grupo en* G_i*. Con esta operación el elemento* $e := (e_i)_{i \in I}$*, con* e_i *la identidad del grupo* G_i*, es la identidad de* P*. Es claro que para un* $g = (g_i)_{i \in I}$ *su inverso esta dado por* $g^{-1} := (g_i^{-1})_{i \in I}$*.*

Así $P = \prod_{i \in I} G_i$ *es un grupo y será conocido como el* ***producto directo*** *de* $\{G_i\}_{i \in I}$*.*

Tomamos las proyecciones canónicas $\pi_i : P \to G_i$*, que resultan también ser homomorfismos, entonces* P *junto con las flechas* π_i*, es el producto en* ***Grp****. Para probarlo, sea* H *un grupo cualquiera y una familia de flechas* $\{f_i : H \to G_i\}_{i \in I}$*, análogo a lo hecho en el anterior ejemplo en* ***Top*** *se obtiene que* $f = (f_i)_{i \in I}$ *es la única flecha tal que* $\pi_i f = f_i$ *para todo* $i \in I$*.*

Por ultimo, se tiene que f *es homomorfismo, pues cada* f_i *lo es. Así obtenemos la propiedad universal del producto y lo que se afirmaba.*

Retomando la teoría general, notemos que en la definición de producto obtenemos su concepto dual si revertimos todas las flechas.

Definición. *Dada $\mathscr{A}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de elementos de $\mathscr{A}$, entonces un **coproducto** para $\{A_i\}_{i\in I}$ es un producto en la categoría $\mathscr{A}^{op}$.*

Observación 25. *Explícitamente, un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$ consta de un elemento Q junto con una familia de flechas $\{\iota_i : A_i \to Q\}_{i\in I}$ tales que para todo objeto X y toda familia de flechas $\{f_i : A_i \to X\}_{i\in I}$ existe una única flecha $\overline{f} : Q \to X$ tal que $\overline{f} \circ \iota_i = f_i$ para todo $i \in I$.*

Usando el concepto de dualidad, es decir revirtiendo la dirección de las flechas en la demostración original, se puede probar que:

> **Lema 8.5.** *Para una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, si existe un producto $(Q, \{\iota_i\}_{i\in I})$, entonces Q es esencialmente único*

Como es esencialmente unico, podemos fijar una notación, la más usual siendo

$$\coprod_{i\in I} A_i$$

para el coproducto Q de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$.

Ejemplo 8.12.

- *En **Set**, para una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ se tiene que su unión disjunta: $\coprod_{i\in I} A_i$, junto con las inyecciones canónicas $(\iota_i)_{i\in I}$ (ver Lección 1) es el coproducto en el sentido de teoría de categorías. Esto justifica porque tenemos la misma notación para ambas construcciones. La demostración es similar a la hecha para el producto y se deja como ejercicio.*
- *Más aún, como era de esperarse, en **Top** se tiene que $\coprod_{i\in I} X_i$ armada de la topología de unión disjunta es el coproducto de una familia de espacios topológicos $\{X_i\}_{i\in I}$. De nuevo la demostración es análoga a la hecha para el producto y se vale otra vez del lema 0.2.*
- *Como el coproducto no es mas que el producto para categoría opuesta, entonces es claro que para un poset $(P, \leqslant)$ el coproducto de dos elementos x, y si es que existe es $\max\{x, y\}$.*
- *El coproducto de una familia vacía de elementos es un objeto universal.*

Ejemplo 8.13. *Para las categorías **Grp** y **Ab** la situación es mucho más interesante.*

- *Empezamos con **Ab**, aquí para cada familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ podemos definir un coproducto de la siguiente manera:*

  Sea

  $$\bigoplus_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} : \ g_i \in G_i \ \ \forall i \in I \ \ y \ g_i = e_i \ \ \forall i \in I \backslash J \ \ con \ J \ finito\},$$

  *donde e_i es el elemento identidad de G_i. Notemos que $\oplus_{i\in I} G_i \subset \prod_{i\in I} G_i$, con igualdad solamente cuando I es un un conjunto finito. Algo importante, esta construcción es sospechosamente similar a cuando discutimos de sumas formales en el contexto de espacios vectoriales libres. Por esta razón su notación, al igual que la alternativa $\sum_{i\in I} G_i$, refleja esta similitud, además llamaremos a este conjunto la **suma directa** de los grupos G_i.*

  Es un grupo con la misma operación que definimos para el producto directo de grupos.

  Es fácil ver que si todos los grupos G_i son abelianos, entonces su suma directa lo será también. Definamos ahora, para cada $k \in I$, las funciones $\iota_k : G_k \to \bigoplus_{i\in I} G_i$ como

$\iota_k(g) = (g_i)_{i\in I}$ *donde* $(g_k) = g$ *y* $g_i = e_i$ *para todos los demás índices. De esta manera, la suma directa* $\bigoplus_{i\in I} G_i$ *junto con las funciones* $\{\iota_i\}_{i\in I}$ *es el coproducto en* ***Ab***.

Para probar esto, fijemos cualquier grupo abeliano H *y una familia de homomorfismos* $\{f_i : G_i \to H\}_{i\in I}$*, ahora debemos encontrar un único homomorfismo* $\overline{f} : \oplus_{i\in I} G_i \to H$ *tal que* $\overline{f} \circ \iota_i = f_i$ *para todo* $i \in I$.

Declaramos

$$\overline{f}(x) = f_{i_1}(x_{i_1}) + f_{i_2}(x_{i_2}) + \cdots + f_{i_n}(x_{i_n}),$$

donde $i_1, \ldots, i_n$ *son todos los índices* i *en donde* $x_i \neq e_i$ *y* $+$ *es la operación de* G. *Si* x *es la identidad de la suma directa entonces se declara* $\overline{f}(x) = 0$ *con* 0 *la identidad en* H. *De esta manera y como* H *es abeliano se comprueba que* $\overline{f}$ *es un homomorfismo.*

El hecho de que cumpla propiedad universal del coproducto y que $\overline{f}$ *es único se deja como ejercicio.*

- *Para la categoría* ***Grp*** *la anterior construcción no es adecuada, ya que aqui no es un coproducto. Un contraejemplo se puede encontrar en*

  https://planetmath.org/counterexamplesforproductsandcoproduct.

  Por consiguiente, es necesario una nueva construcción a partir de una familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$.

  Construimos $\ast_{i\in I} G_i$*, el* ***producto libre*** *de grupos, como el conjunto de palabras, análogamente como el grupo libre serán sucesiones* $(g_1, g_2, \ldots)$ *tal que cada* g_k *pertenece a algún* G_{i_k} *con* $i_k \in I$*, además existe algún* $n \in \mathbb{N}$ *para el cual* $g_k = e_{i_k}$ *si y solo si* $k > n$. *Escribimos a la palabra anterior como*

  $$g_1 g_2 \cdots g_n.$$

  Además, estas palabras serán reducidas, es decir tenemos de nuevo que $g_{k+1} \neq g_k^{-1}$ *para todo* $k = 1, \ldots n$ *pero además* g_{k+1} *no pertenecen a* G_{i_k} *para todo* $k = 1, \ldots n-1$.

  Esto quiere decir que una palabra reducida no tiene productos sin simplificar, ya sea porque están dos inversos juntos o porque hay dos elementos del mismo grupo que pueden expresarse como un solo elemento. La operación de grupo en $\ast_{i\in I} G_i$ *será la concatenación.*

  Definimos $\iota_k : G_k \to \ast_{i\in I} G_i$ *como* $\iota_k(e_k)$ *igual a la palabra vacía y para otro caso* $\iota_k(g)$ *es igual a la palabra* g. *Ahora* $\ast_{i\in I} G_i$ *junto con los homomorfismos* ι_k *es el coproducto en* **Grp**. *La demostración es similar a la hecha para la suma directa.*

  Fijamos un grupo G *y una familia de homomorfismos*

  $$\{f_i : G_i \to H\}_{i\in I},$$

  debemos encontrar un único $\overline{f} : \ast_{i\in I} G_i \to H$ *tal que* $\overline{f} \circ \iota_i = f_i$ *para todo* $i \in I$.

  Para toda palabra $x = g_1 \ldots g_n \in$ *con* $g_k \in G_{i_k}$ *definimos*

  $$\overline{f}(x) = f_{i_1}(g_{i_1}) \cdot f_{i_2}(g_{i_2}) \cdot \ldots \cdot f_{i_n}(g_{i_n}),$$

  donde $\cdot$ *es la operación de* H. *Se deja como ejercicio la comprobación de que, en efecto,* $\overline{f}$ *está bien definida y que se cumple la propiedad universal del coproducto.*

Ejercicio 8.14. *Encontrar los coproductos en las categorías* ***Set****** *y* ***Top******. *Pista: Será la suma wedge. Véase Lección 1.*

9. Secciones y Retracciones

Como hemos visto, en teoría de categorías es mucho mejor formular los conceptos por medio de flechas en lugar de objetos. Por ejemplo, cuando se justifico el concepto de producto se considero a un elemento $x \in A$ en un conjunto como una función $x : \{1\} \to A$. Esto nos permite considerar el siguiente concepto

Definición. *Un **elemento generalizado** (con forma X) en $\mathscr{A}$ es una flecha $f : X \to A$.*

Observación 26. *En general es útil pensar en X como un "molde" para el objeto requerido. Por ejemplo, si $X = \bullet$, donde $\bullet$ simboliza cualquier conjunto unitario, por ejemplo $\{1\}$, entonces un elemento generalizado con forma X es un elemento de A.*

Ahora si queremos generalizar el concepto de función inyectiva para las flechas de una categoría, tenemos que reemplazar en sus definición a los elementos de su dominio por elementos generalizados.

Definición. *Una flecha $f : A \to B$ se dirá **monomorfismo** si es que es inyectiva en elementos generalizados, esto es $fx = fx'$ implica que $x = x'$ para todo $x, x' : X \to A$.*

De igual manera tenemos el concepto dual.

Definición. *Una flecha $f : A \to B$ se dirá **epimorfismo** si es que $xf = x'f$ que $x = x'$ para todo $x, x' : B \to X$.*

Lema 9.1. *En la categoría **Set** una flecha es monomorfismo si y solo es inyectiva. Y será un epimorfismo si y solo es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un monomorfismo en **Set**. Sean $a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$, debemos probar que $a = a'$. En efecto, si consideramos los elementos generalizados $x : \bullet \to A$, $x' : \bullet \to A'$; donde, de nuevo, $\bullet$ es cualquier conjunto unitario digamos $\bullet = \{u\}$ y tales que $x(u) = a$ y $x'(u) = a$. Luego, se tiene que

$$fx(u) = f(a) = f(a') = fx'(u),$$

con lo cual $fx = fx'$; por definición de monomorfismo se obtiene $x = x'$ y por tanto $a = x(u) = x'(u) = a'$.

De manera conversa, si es que f es inyectiva y $x, x' : C \to A$ son funciones tales que $x \neq x'$ entonces para algún $u \in C$ se tiene que $x(u) \neq x'(u)$. Por tanto, $fx(u) \neq fx'(u)$ al ser f inyectiva; de donde deducimos $fx \neq fx'$. El resultado para epimorfismos se deja al lector. $\square$

Es razonable pensar que al menos en categorías concretas los monomorfismos y los expimorfismos representan funciones inyectivas y sobreyectivas respectivamente, que respetan además la estructura impuesta en los objetos de cada categoría. Sin embargo, este no siempre es el caso.

Ejemplo 9.1. *Sea la categoría **Mon** y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la inclusión, esto es $f(x) = x$. Ahora, esta función es homomorfismo de monoides si es que vemos a $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ como monoides con la operación suma. La función f es un monomorfismo, pero no es sobreyectivo.*

En efecto, supongamos que tenemos cualesquier par de flechas $x, x' : (\mathbb{Z}, +) \to (M, \cdot)$ donde M es un monoide con la operación $\cdot$ y tiene una unidad e. Ahora si es que $xf = x'f$ entonces esto significa que $x|_{\mathbb{N}} = x'|_{\mathbb{N}}$.

Ahora para probar que $x = x'$ se debe verificar que $x(-n) = x'(-n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, solo necesitamos probar que $x(-1) = x'(-1)$. Esto es cierto porque:

$$\begin{aligned}
x(-1) &= x(-1) \cdot e, \\
&= x(-1) \cdot x'(0), \\
&= x(-1) \cdot x'(1) \cdot x'(-1), \\
&= x(-1) \cdot x(1) \cdot x'(-1), \\
&= x(0) \cdot x'(-1), \\
&= e \cdot x'(-1) = x'(-1).
\end{aligned}$$

Teorema 9.2. *En cualquier categoría, un isomorfismo es un monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración. Si f es un isomorfismo entonces componiendo con su inversa obtenemos que $fx = fx'$ implica que $x = x'$ siento entonces un monomorfismo, de manera análoga es un epimorfismo. Alternativamente, el siguiente diagrama siempre conmuta si f es isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "f^{-1}"] & \\
 & & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y
\end{tikzcd}$$

□

Para complementar las ideas expuestas se tiene el siguiente resultado que es solo una reformulación de las definiciones.

Lema 9.2. *$f : x \to y$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$ si y solo si para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ se tiene que, en la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -)$, la flecha $f_* : \mathrm{Hom}(A, x) \to \mathrm{Hom}(A, y)$ es inyectiva. Dualmente, $f : x \to y$ es un monomorfismo en $\mathscr{A}$ si y solo si para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ se tiene que, en la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A)$, la flecha $f^* : \mathrm{Hom}(y, A) \to \mathrm{Hom}(x, A)$ es inyectiva.*

Demostración. Ejercicio. □

Como vimos anteriormente, el hecho que un isomorfismo tenga un inverso en ambos lados, le permitió ser tanto mono como epimorfismo. De manera similar, si tenemos un inverso en un lado obtendremos que una flecha será monomorfismo y la otra epimorfismo.

Definición. *Supongamos que tenemos dos flechas $s : x \to y$, $r : y \to x$ tales que $rs = 1_x$. La flecha s es un inverso por la derecha para r y se le le dirá una* ***sección*** *de s. De forma similar, r es un inverso por la derecha para s y le dirá una* ***retracción*** *de s.*

De la anterior definición, es usual decir que el objeto x es una retracción del objeto y. Toda flecha con un inverso por la izquierda es un monomorfismo, y cuando esto se sucede se dirá que es un **monomorfismo separado** (o que posee una retracción) de la misma forma toda flecha con un inverso por la derecha es un epimorfismo, al cual se lo denominará como **epimorfismo separado** (o que posee una sección).

Como se puede apreciar en el ejercicio resuelto 4, a continuación, los epimorfismos separados tienen una conexión importante con el axioma de elección en la categoría **Set**.

Observación 27. *Si es que $rs = 1_x$, se observa que la flecha $f = sr$ cumple con que $f^2 := ff = f$. Toda flecha que pueda componerse consigo misma y que cumpla $f^2 = f$, se le conoce como **idempotente**.*

Ejercicio Resuelto 4

Demuestre que la afirmación

En **Set**, *todo epimorfismo tiene una sección.*

es equivalente al axioma de elección.

Demostración. Probamos primero una dirección. Supongamos que se cumple que, en **Set**, todo epimorfismo tiene una sección. Ahora, tomemos una familia indexada de conjuntos no vacíos $(E_x)_{x\in X}$, donde X es un conjunto. Debemos probar que existe una función de elección para esta familia. Para ello definimos

$$E = \{(x, y) \ : \ x \in X \text{ con } y \in E_x\}.$$

La función $e : E \to X$ con $e(x, y) = x$ es un epimorfismo. En efecto, sea Y otro conjunto y dos funciones $i, j : X \to Y$ tales que $ie = je$. Esto significa que $i(e(x, y)) = j(e(x, y))$ para todo $x \in X$, $y \in E_x$, pero entonces $i(x) = j(x)$ para todo $x \in X$, por lo tanto $i = j$ en **Set**.

Ahora por la hipótesis, aplicándola para el epimorfismo e, tenemos que existe una sección $s : X \to E$ tal que $es = 1_X$ pero esto es $e(s(x)) = x$ para todo $x \in X$, lo que implica que si $s(x) = (a_x, b_x)$ entonces necesariamente $a_x = x$ y $b_x \in E_x$. Luego la función $x \mapsto b_x$ es la elección requerida.

Para probar la otra dirección suponemos que se cumple el axioma de elección y tomemos un epimorfismo $e : A \to X$ en **Set**, sabemos entonces que es una función sobreyectiva. Por lo tanto, $\{A_x\}_{x\in X}$, con $A_x = e^{-1}\{x\}$, es una familia indexada de conjuntos no vacíos y si tomamos una función de elección para esta familia, obtenemos $s : X \to A$ tal que $s(x) = A_x \subset A$ para todo $x \in X$, pero entonces $s(x) \in e^{-1}\{x\}$, luego $e(s(x)) = x$ para todo $x \in X$. De este modo concluímos que s es una sección de e. $\square$